BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2015*

2010 MR Subject Classification 41A35, 47A58.

A–СТАТИСТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КОЛЬЦЕ ФУНКЦИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Р.А.АЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет

aliyevrashid@mail.ru

В работе рассматривается пространство аналитических в кольце функций с топологией компактной сходимости, найдена критерия A-статистической сходимости последовательности функций в этой пространстве и доказаны теоремы об A-статистической аппроксимации функций в этом пространстве последовательностями линейных, в частности линейных k-положительных операторов.

Ключевые слова: пространство аналитических в кольце функций, аппроксимация функций линейными операторами, линейные k-положительные операторы, теоремы типа Коровкина, A-статистическая сходимость.

Известно, что последовательности линейных положительных операторов играют важную роль в теории приближения функций (см [1], [2]). При аппроксимациях аналитических функций последовательностям линейных операторов в основном используются последовательность k-положительных линейных операторов. Впервые k-положительные линейные операторы были введены в работе [3] для получения аналогов теоремы типа Коровкина в пространстве аналитических функций на единичной окружности. В дальнейшем различные проблемы аппроксимации аналитических функций k-положительными линейными операторами изучены в работах [4]-[12]. Аппроксимация аналитических функций линейными операторами не используя k-положительности рассмотрены в работах [13], [14].

Настоящая статья посвящена A-статистической аппроксимации аналитических в кольце функций линейными операторами с топологией компактной сходимости. В работе найдена критерия A-статистической сходимости функций в этой пространстве и доказаны теоремы об A-

статистической аппроксимации функций в этом пространстве последовательностей линейных, в частности линейных k-положительных операторов.

Определение 1. Матрица $A=\left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^{\infty}$ называется регулярной, если для любой сходящейся последовательности $\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ последовательность $y_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}x_j$, $i\in N$ также сходится и $\lim_{j\to\infty}x_j=\lim_{i\to\infty}y_i$.

Известно, что (см. [15]) матрица $A=\left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^{\infty}$ регулярна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

i) $\exists\, C>0 \quad \forall i\in N \quad \sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{i,j}\right|<C$;

ii) $\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}=1$;

iii) $\forall\, j\in N \quad \lim_{i\to\infty}a_{i,j}=0$.

Отметим, что для неотрицательных (то есть если $a_{i,j}\ge 0$ для любого $i,\, j\in N$) регулярных матриц условие i) следует из условия ii).

Определение 2 [16]. Пусть $A=\left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^{\infty}$ неотрицательная регулярная матрица и $\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ последовательность в пространстве X. Если для любого $\varepsilon>0$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}n^{-1}\left|\left\{i\le n:\left|y_i-\alpha\right|>\varepsilon\right\}\right|=0,$$

то последовательность $\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ называется A-статистически сходящейся, а элемент α называется A-статистическим пределом последовательности $\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ и обозначается через $\alpha=A_{st}-\lim_{j\to\infty}x_j$, где $y_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}x_j$, $i\in N$ и $\left|B\right|$ означает кардинальное число множества B (в нашем случае число элементов входящие в множество B).

В частном случае, если $A=\left(\delta_{i,j}\right)_{i,j=1}^{\infty}$, то A-статистическая сходимость называется статистической сходимостью, где $\delta_{i,j}$ – символ Кронеккера.

Пусть $D=\left\{z\in C: r<\left|z-a\right|<R\right\}$ кольцо с центром в точке a.

Обозначим через $A(D)$ пространство аналитических в D функций с топологией компактной сходимости. Это означает, что сходимость в этом пространстве является равномерной сходимостью в любом компакте лежащий внутри D. Для $r < r' < R' < R$ введем полунормы $\|f\|_{A(D),r',R'} = \max_{r' \le |z-a| \le R'} |f(z)|$, которые превращают $A(D)$ в пространство типа Фреше.

Известно, что (см., напр., [17], [18]) система функций $(z-a)^k$, $k \in Z$, образует базис в пространстве $A(D)$, то есть, любую функцию $f \in A(D)$ единственным образом можно представить в виде

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k (z-a)^k, \qquad (1)$$

где коэффициенты f_k, $k \in Z$ определяются по формуле

$$f_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(z-a)^{-k-1} dz, \qquad (2)$$

и Γ любая окружность с центром в точке a с радиусом больше, чем r и меньше, чем R.

Сначала докажем следующую теорему об A-статистической сходимости к нулю в пространстве $A(D)$.

Теорема 1. Последовательность функций $f_n(z)$ A-статистически сходится к нулю в пространстве $A(D)$ тогда и только тогда, когда коэффициенты разложения $f_n(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k^{(n)} (z-a)^k$ удовлетворяют условию

$$\left| f_k^{(n)} \right| < \begin{cases} \varepsilon_n (1+\delta_n)^k R^{-k} & при \;\; k \ge 0, \\ \varepsilon_n (1+\delta_n)^{-k} r^{-k} & при \;\; k < 0, \end{cases} \qquad (3)$$

для любого $n \in N$, где

$$A_{st} - \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0 \qquad (4)$$

Доказательство. Из условий (3) и (4) следует, что для каждого $r < r' < R' < R$ имеет место неравенство

$$\|f_n\|_{A(D),r',R'} = \max_{r' \le |z-a| \le R'} |f_n(z)| \le \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_n (1+\delta_n)^k \left(\frac{R'}{R}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_n (1+\delta_n)^k \left(\frac{r}{r'}\right)^k =$$

$$= \left[\frac{R}{R - (1+\delta_n)R'} + \frac{(1+\delta_n) r}{r' - (1+\delta_n) r} \right] \varepsilon_n \qquad (5)$$

и правая часть неравенства (5) A-статистически стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда получаем достаточность.

Докажем необходимость. Из A-статистически сходимости к нулю в пространстве $A(D)$ функций $f_n(z)$ следует, что для любого $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\left|\left\{m \le n:\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{m,j}\left\| f_j \right\|_{A(D),r(1+\delta),\frac{R}{1+\delta}} > \varepsilon\right\}\right| = 0. \qquad (6)$$

Обозначим $\delta = \varepsilon = \dfrac{1}{p}$, $p = 1,2,3,\ldots$. Из равенства (6) следует, что существует последовательность $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots. < n_p < \ldots$, такая, что при $n \ge n_p$ выполняется неравенство

$$n^{-1}\left|\left\{m \le n:\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{m,j}\left\| f_j \right\|_{A(D),\frac{r(1+p)}{p},\frac{pR}{1+p}} > \frac{1}{p}\right\}\right| < \frac{1}{p}. \qquad (7)$$

Обозначим $\delta_j = \dfrac{1}{p}$, $\varepsilon_j = \left\| f_j \right\|_{A(D),r(1+\delta_j),\frac{R}{1+\delta_j}} = \left\| f_j \right\|_{A(D),\frac{r(1+p)}{p},\frac{pR}{1+p}}$ для $j \in \overline{n_p, n_{p+1}-1}$, $p = 1,2,3,\ldots$ Из неравенства (7) получим, что $A_{st} - \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

Для $k \ge 0$ из равенства

$$f_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a| = \frac{R}{1+\delta_n}} f_n(z)(z-a)^{-k-1}dz$$

следует неравенство

$$\left| f_k^{(n)} \right| = \frac{1}{2\pi}\left| \int\limits_{|z-a| = \frac{R}{1+\delta_n}} f_n(z)(z-a)^{-k-1}dz \right| \le \varepsilon_n (1+\delta_n)^k R^{-k},$$

и для $k < 0$ из равенства

$$f_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a| = r(1+\delta_n)} f_n(z)(z-a)^{-k-1}dz$$

следует неравенство

$$\left| f_k^{(n)} \right| = \frac{1}{2\pi}\left| \int\limits_{|z-a| = r(1+\delta_n)} f_n(z)(z-a)^{-k-1}dz \right| \le \varepsilon_n (1+\delta_n)^{-k} r^{-k}.$$

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим линейные операторы в пространстве $A(D)$. Из разложения (1) следует, что для любого линейного оператора $T : A(D) \to A(D)$ имеет место представление

$$(Tf)(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{p=-\infty}^{\infty}T_{k,p}f_p\right)(z-a)^k,$$

где $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_k(z-a)^k$ и $T\left((z-a)^p\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}T_{k,p}(z-a)^k$.

Пусть последовательность положительных чисел $g=\{g_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет следующему условию

$$\forall k\in Z:\ \Delta_k(g)=\inf_{p\in Z,\,p\neq k}\left|\sqrt{g_k}-\sqrt{g_p}\right|>0,$$

$$\lim_{k\to\pm\infty}\left(\Delta_k(g)\right)^{\frac{1}{k}}=1,\quad \lim_{k\to\pm\infty}\left(g_k\right)^{\frac{1}{k}}=1. \tag{8}$$

Определение 3. Через $A_g(D)$ обозначим множество аналитических функций

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_k(z-a)^k\in A(D),$$

удовлетворяющие условию

$$|f_k|\le\begin{cases}M_f\,g_k\,R^{-k} & при\ \ k\ge 0,\\ M_f\,g_k\,r^{-k} & при\ \ k<0,\end{cases} \tag{9}$$

где M_f постоянная, не зависящая от k.

Теорема 2. Пусть $T_n: A(D)\to A(D)$ последовательность линейных операторов и

$$(T_n f)(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{p=-\infty}^{\infty}T_{k,p}^{(n)}f_p\right)(z-a)^k, \tag{10}$$

где $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_k(z-a)^k\in A(D)$. Если существует последовательности чисел $\{\varepsilon_n\}$ и $\{\delta_n\}$, удовлетворяющие условию (4) и выполняются неравенства

$$\left|\sum_{p=-\infty}^{\infty}T_{k,p}^{(n)}\alpha_p-\alpha_k\right|<\varepsilon_n(1+\delta_n)^k\alpha_k, \tag{11}$$

$$\left|\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|T_{k,p}^{(n)}\right|\alpha_p-\alpha_k\right|<\varepsilon_n(1+\delta_n)^k\alpha_k, \tag{12}$$

$$\left|\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|T_{k,p}^{(n)}\right|\sqrt{g_p}\,\alpha_p-\sqrt{g_k}\,\alpha_k\right|<\varepsilon_n(1+\delta_n)^k\alpha_k, \tag{13}$$

$$\left|\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|T_{k,p}^{(n)}\right|g_p\alpha_p-g_k\alpha_k\right|<\varepsilon_n(1+\delta_n)^k\alpha_k, \tag{14}$$

тогда для любой функции $f\in A_g(D)$ и для любого $r<r'<R'<R$ имеет место равенство

$$A_{st}-\lim_{n\to\infty}\left\|T_n f - f\right\|_{A(D),r',R'}=0,$$

где $\alpha_k = R^{-k}$ при $k \ge 0$ и $\alpha_k = r^{-k}$ при $k<0$.

Доказательство. Из (12) - (14) следует

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|T_{k,p}^{(n)}\right|\left(\sqrt{g_p}-\sqrt{g_k}\right)^2\alpha_p \le 4\varepsilon_n\left(1+\delta_n\right)^k\alpha_k\left(1+\sqrt{g_k}\right)^2, \tag{15}$$

и, следовательно,

$$\sum_{\substack{p=-\infty\\ p\ne k}}^{\infty}\left|T_{k,p}^{(n)}\right|\alpha_p \le \frac{4\varepsilon_n\left(1+\delta_n\right)^k\alpha_k\left(1+\sqrt{g_k}\right)^2}{\Delta_k^2(g)}. \tag{16}$$

Для любой функции $f(z)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f_k(z-a)^k \in A(D)$ имеем

$$T_n f(z) - f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{p=-\infty}^{\infty}T_{k,p}^{(n)}f_p - f_k\right\}(z-a)^k =$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{p=-\infty}^{\infty}T_{k,p}^{(n)}\alpha_p-\alpha_k\right\}\frac{f_k}{\alpha_k}(z-a)^k+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{p=-\infty}^{\infty}T_{k,p}^{(n)}\left(\frac{f_p}{\alpha_p}-\frac{f_k}{\alpha_k}\right)\alpha_p\right\}(z-a)^k=$$

$$=J_n^{(1)}(z)+J_n^{(2)}(z). \tag{17}$$

Если $f \in A_g(D)$, тогда из (9), (11), (15) и (16) получим:

$$\left|J_n^{(1)}(z)\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{p=-\infty}^{\infty}T_{k,p}^{(n)}\alpha_p-\alpha_k\right|\left|\frac{f_k}{\alpha_k}\right|\left|z-a\right|^k \le M_f\varepsilon_n\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(1+\delta_n\right)^k\alpha_k g_k\left|z-a\right|^k;$$

$$\left|J_n^{(2)}(z)\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|T_{k,p}^{(n)}\right|\left|\frac{f_p}{\alpha_p}-\frac{f_k}{\alpha_k}\right|\alpha_p\right\}\left|z-a\right|^k \le M_f\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{\substack{p=-\infty\\ p\ne k}}^{\infty}\left|T_{k,p}^{(n)}\right|\alpha_p\left[g_p+g_k\right]\right\}\left|z-a\right|^k \le$$

$$\le M_f\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{\substack{p=-\infty\\ p\ne k}}^{\infty}\left|T_{k,p}^{(n)}\right|\alpha_p\left[2\left(\sqrt{g_p}-\sqrt{g_k}\right)^2+3g_k\right]\right\}\left|z-a\right|^k \le$$

$$\le 4M_f\varepsilon_n\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(2+\frac{3g_k}{\Delta_k^2(g)}\right)\left(1+\delta_n\right)^k\alpha_k\left(1+\sqrt{g_k}\right)^2\left|z-a\right|^k.$$

Отсюда и из равенства (17) следует, что для любого $r<r'<R'<R$ имеет место равенство

$$A_{st}-\lim_{n\to\infty}\left\|T_n f - f\right\|_{A(D),r',R'}=0.$$

Теорема доказана.

Теперь сформулируем следующий общий результат о приближении линейными операторами в пространстве $A(D)$.

Теорема 3. Пусть последовательность положительных чисел

$b=\{b_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ и $g=\{g_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяют условию (8) и $T_n : A(D)\to A(D)$ линейный оператор, определенный равенством (10). Если существует последовательности чисел $\{\varepsilon_n\}$ и $\{\delta_n\}$, удовлетворяющие условию (4) и выполняются неравенства

$$\left|\sum_{p=-\infty}^{\infty} T_{k,p}^{(n)} g_p\alpha_p - g_k\alpha_k\right| < \varepsilon_n(1+\delta_n)^k \alpha_k, \tag{18}$$

$$\left|\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left|T_{k,p}^{(n)}\right| g_p\alpha_p - g_k\alpha_k\right| < \varepsilon_n(1+\delta_n)^k \alpha_k, \tag{19}$$

$$\left|\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left|T_{k,p}^{(n)}\right| \sqrt{b_p}\, g_p\alpha_p - \sqrt{b_k}\, g_k\alpha_k\right| < \varepsilon_n(1+\delta_n)^k \alpha_k, \tag{20}$$

$$\left|\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left|T_{k,p}^{(n)}\right| b_p g_p\alpha_p - b_k g_k\alpha_k\right| < \varepsilon_n(1+\delta_n)^k \alpha_k. \tag{21}$$

тогда для любой функции $f\in A_g(D)$ и для любого $r<r'<R'<R$ имеет место равенство

$$A_{st}-\lim_{n\to\infty}\|T_n f - f\|_{A(D),r',R'} = 0,$$

где $\alpha_k = R^{-k}$ при $k\ge 0$ и $\alpha_k = r^{-k}$ при $k<0$.

Доказательство. Из (19)-(21) следует

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left|T_{k,p}^{(n)}\right| \left(\sqrt{b_p}-\sqrt{b_k}\right)^2 g_p\alpha_p \le 4\varepsilon_n(1+\delta_n)^k \alpha_k\left(1+\sqrt{b_k}\right)^2, \tag{22}$$

и, следовательно,

$$\sum_{\substack{p=-\infty\\ p\ne k}}^{\infty} \left|T_{k,p}^{(n)}\right| g_p\alpha_p \le \frac{4\varepsilon_n(1+\delta_n)^k \alpha_k\left(1+\sqrt{b_k}\right)^2}{\Delta_k^2(b)}. \tag{23}$$

Для любой функции $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(z-a)^k \in A(D)$ имеем

$$T_n f(z) - f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{p=-\infty}^{\infty} T_{k,p}^{(n)} f_p - f_k\right\}(z-a)^k =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{p=-\infty}^{\infty} T_{k,p}^{(n)} g_p\alpha_p - g_k\alpha_k\right\}\frac{f_k}{g_k\alpha_k}(z-a)^k +$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{p=-\infty}^{\infty} T_{k,p}^{(n)}\left(\frac{f_p}{g_p\alpha_p}-\frac{f_k}{g_k\alpha_k}\right)g_p\alpha_p\right\}(z-a)^k = \tilde{J}_n^{(1)}(z)+\tilde{J}_n^{(2)}(z). \tag{24}$$

Если $f\in A_g(D)$, тогда из (9), (18), (22) и (23) получим:

$$\left|\widetilde{J}_n^{(1)}(z)\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{p=-\infty}^{\infty} T_{k,p}^{(n)} g_p\alpha_p - g_k\alpha_k\right|\left|\frac{f_k}{g_k\alpha_k}\right||z-a|^k \le M_f\varepsilon_n \sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+\delta_n)^k\alpha_k|z-a|^k;$$

$$\left|\widetilde{J}_n^{(2)}(z)\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|T_{k,p}^{(n)}\right|\left|\frac{f_p}{g_p\alpha_p} - \frac{f_k}{g_k\alpha_k}\right| g_p\alpha_p\right\}|z-a|^k \le 2M_f\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{\substack{p=-\infty \\ p\ne k}}^{\infty}\left|T_{k,p}^{(n)}\right| g_p\alpha_p\right\}|z-a|^k \le$$

$$\le 8M_f\varepsilon_n\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(1+\delta_n)^k\alpha_k\left(1+\sqrt{b_k}\right)^2|z-a|^k}{\Delta_k^2(b)}.$$

Отсюда и из равенства (24) следует, что для любого $r < r' < R' < R$ имеет место равенство

$$A_{st} - \lim_{n\to\infty}\|T_n f - f\|_{A(D),r',R'} = 0.$$

Теорема доказана.

Определение 4. Если линейный оператор $T_n : A(D) \to A(D)$ сохраняет подкласс аналитических функций с положительными коэффициентами Лорана, то он называется k-положительным. Очевидно, что k-положительность оператора

$$(Tf)(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} T_{k,p} f_p\right)(z-a)^k,$$

где $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k (z-a)^k$, равносильна неотрицательности коэффициентов $T_{k,p}$.

Пусть последовательность положительных чисел $g = \{g_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяют условию (8). Обозначим

$$h_\nu(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(g_k)^{\frac{\nu}{2}}\alpha_k(z-a)^k, \quad \nu = 0,1,2,$$

где $\alpha_k = R^{-k}$ при $k \ge 0$ и $\alpha_k = r^{-k}$ при $k < 0$.

Теорема 4. Пусть $T_n : A(D) \to A(D)$ последовательность линейных k-положительных операторов. Для каждой $f \in A_g(D)$ последовательность функций $T_n f(z)$ A-статистически сходиться к функцию $f(z)$ в пространстве $A(D)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$A_{st} - \lim_{n\to\infty} T_n h_\nu(z) = h_\nu(z), \quad \nu = 0,1,2$$

в пространстве $A(D)$.

Доказательство. Из теоремы 1, из A-статистически сходимости к нулю последовательности $T_n h_\nu - h_\nu$, $\nu = 0,1,2$ в пространстве $A(D)$ и из k-положительности операторов $T_n : A(D) \to A(D)$ получим, что существует последовательности чисел $\{\varepsilon_n\}$ и $\{\delta_n\}$, удовлетворяющие условию (4) и выполняются неравенства (12)-(14). Тогда из теоремы 2 следует теорема 4. Теорема доказана.

Пусть последовательности положительных чисел $b=\{b_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ и $g=\{g_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяют условию (8). Обозначим

$$H_\nu(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(b_k)^{\frac{\nu}{2}}g_k\alpha_k(z-a)^k,\ \ \nu=0,1,2,$$

где $\alpha_k=R^{-k}$ при $k\geq 0$ и $\alpha_k=r^{-k}$ при $k<0$.

Теорема 5. Пусть $T_n:A(D)\to A(D)$ последовательность линейных k-положительных операторов. Для каждой $f\in A_g(D)$ последовательность функций $T_n f(z)$ A-статистически сходиться к функцию $f(z)$ в пространстве $A(D)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\lim_{n\to\infty}T_nH_\nu(z)=H_\nu(z),\ \ \nu=0,1,2$$

в пространстве $A(D)$.

Доказательство. Из теоремы 1, из A-статистически сходимости к нулю последовательности $T_nH_\nu-H_\nu$, $\nu=0,1,2$ в пространстве $A(D)$ и из k-положительности операторов $T_n:A(D)\to A(D)$ получим, что существует последовательности чисел $\{\varepsilon_n\}$ и $\{\delta_n\}$, удовлетворяющие условию (4) и выполняются неравенства (18)-(21). Тогда из теоремы 3 следует теорема 5. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коровкин П.П. Линейные операторы и теория приближений. М., 1959, 212 стр.
2. Altomare F., Campiti M. Korovkin-type Approximation Theory and its Applications. in: de Gruyter Studies in Mathematics, v.17, Berlin, 1994, 3-25.
3. Гаджиев А.Д. Линейные k-положительные операторы в пространстве регулярных функций и теоремы типа П.П.Коровкина. Изв. АН Азерб. ССР, Сер. физ.-матем. и техн. наук, 5 (1974), 49-53.
4. Ispir N., Atakut C. On the Convergence of a Sequence of Positive Linear Operators on the Space of m–Multiple Complex Sequences // Hacettepe Bulletin of Natural Sciences and Engineering Series B, 29 (2000), 47-54.
5. Duman O. Statistical Approximation Theorems by k-Positive Linear Operators // Arch. Math. (Basel), 86:6 (2006), 569–576.
6. Ozarslan M.A. J–Convergence Theorems for a Class of k-Positive Linear Operators // Cent. Eur. J. of Math., 7:2 (2009), 357–362.
7. Gadjiev A.D. Simultaneous Statistical Approximation of Analytic Functions and their Derivatives by k-Positive Linear Operators // Azer. J. Math., 1:1 (2011), 57-66.
8. Gadjiev A.D., Duman O., Ghorbanalizadeh A.M. Ideal Convergence of k-Positive Linear Operators // J. Funct. Space. Appl., v. 2012, Article ID 178316, 12 p.
9. Gadjiev A.D., Ghorbanalizadeh A.M. Approximation of Analytical Functions by Sequences of k-Positive Linear Operators // J. Approx. Theory, 162:6 (2010), 1245–1255.
10. Gadjiev A.D., Ghorbanalizadeh A.M. On Approximation Processes in the Space of Analytical Functions // Centr. Eur. J. Math., 8:2 (2010), 389-398.

11. Gadjiev A.D., Aliev R.A. Approximation of Analytical Functions by k-Positive Linear Operators in the Closed Domain // Positivity, 18:3 (2014), 439-447.
12. Aliev R.A. A-Statistical Approximation of Analytical Functions by k-Positive Operators // Trans. of NAS of Azerbaijan, 34:1 (2014), 3-10.
13. Gadjiev A.D., Çetin N. Approximation of Analytic Functions by Sequences of Linear Operators // Filomat, 28:1 (2014), 99-106.
14. Gadjiev A.D., Aliev R.A. Approximation of Analytic Functions in Annulus by Linear Operators // Appl. Math. and Comp., 252 (2015), 438-445.
15. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, Т. I., М.: Мир, 1965, 615 с.
16. Mursaleen M., Edely O.H. On Statistical A-Summability // Math. and Comp. Modelling, 49 (2009), 672-680.
17. Евграфов М.А. Аналитические функции, М., 1965, 424 с.
18. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций, М., 1966, 388 с.

HALQADA ANALİTİK FUNKSİYALARIN XƏTTİ OPERATORLAR ARDICILLIQLARI İLƏ A – STATİSTİK APPROKSİMASİYASI

R.A.ƏLİYEV

XÜLASƏ

Halqada analitik funksiyaların kompakt yığılma topologiyalı fəzasına baxılır, bu fəzada funksiyalar ardıcıllığının A-statistik yığılma meyarı tapılır və bu fəzada funksiyaların xətti operatorlarla, xüsusi halda k-müsbət xətti operatorlarla A-statistik approksimasiyası haqqında teoremlər isbat olunur.

Açar sözlər: halqada analitik funksiyalar fəzası, funksiyaların xətti operatorlarla approksimasiyaları, xətti k-müsbət operatorlar, Korovkin tipli teoremlər, A-statistik yığılma.

A-STATISTICAL APPROXIMATION OF ANALYTIC FUNCTIONS IN ANNULUS BY SEQUENCES OF LINEAR OPERATORS

R.A.ALİYEV

SUMMARY

We consider the space of analytic functions in annulus with the topology of compact convergence, find criterion for A-statistic convergence of sequences in this space and prove the theorems on the A-statistical approximation of functions in this space by the sequences of linear and, in particular, linear k-positive operators.

Key words: space of analytical in annulus functions, approximation of functions by linear operators, linear k-positive operators, Korovkin type theorems, A-statistical convergence

Поступила в редакцию: 28.04.2015 г.
Подписано к печати: 18.06.2015 г.